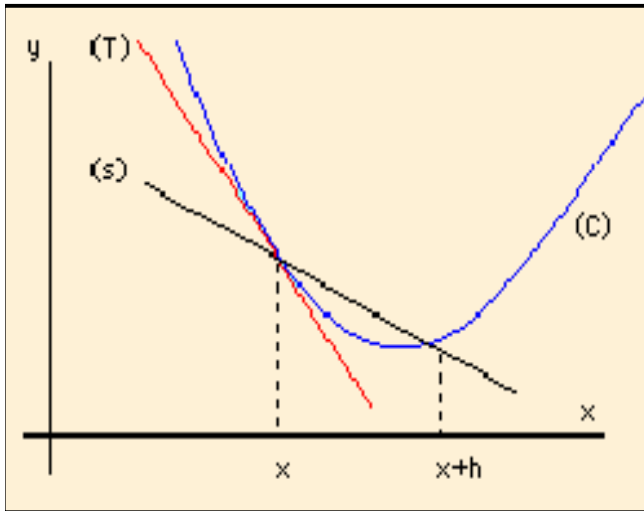


تطبيقات الاشتقاقية



الكفاءات المستهدفة

- ◀ تعيين إتجاه تغير دالة
- ◀ استعمال المشتق لتعيين القيم الحدية.
- ◀ حل مسائل تستخدم فيها دوال ناطقة ودوال صماء

الانشطة

نشاط 1:

الهدف: العلاقة بين إشارة مشتق دالة واتجاه تغيرها.
(1) f متزايدة تماما على i : g متناقصة تماما على i :
 h متزايدة تماما على $[0; +\infty[$ ومتناقصة تماما على

$$]-\infty; 0]$$

$$h'(x) = 2x, \quad g'(x) = -2, \quad f'(x) = 1 \quad (2)$$

$$k'(x) = -\frac{1}{x^2} \quad \text{و}$$

(3) من أجل كل عدد حقيقي x : $f'(x) > 0$ و $g'(x) < 0$

من أجل كل $x \in [0; +\infty[$: $h'(x) > 0$ و من أجل كل

$$x \in]-\infty; 0] : h'(x) < 0$$

$$x \in [0; +\infty[: k'(x) < 0$$

(4) المطلوب مؤكد .

نشاط 2:

الهدف: دراسة إشارة مشتق دالة بيانيا واستنتاج اتجاه تغير هذه الدالة.

$$g(x) = 0 \quad \text{معناه} \quad x = 1 \quad \text{أو} \quad x = -\frac{1}{3} \quad (1)$$

$$(2) \quad \text{من الرسم } f \text{ متزايدة تماما على }]-\infty; -\frac{1}{3}]$$

$$\text{و } [1; +\infty[: \text{ومتناقصة تماما على } [-\frac{1}{3}; 1]$$

(3) من الرسم الدالة g موجبة تماما على

$$]-\frac{1}{3}; 1[\quad \text{وسالبة تماما على }]-\infty; -\frac{1}{3}] \cup [1; +\infty[$$

وتتعدم من أجل القمتين $-\frac{1}{3}$ و 1 فقط .

$$f'(x) = 3x^2 - 2x - 1 = g(x) \quad (4)$$

(5) إشارة f' على \mathbf{R} هي نفس إشارة g .

$$(6) \quad f' \text{ موجبة تماما على } [1; +\infty[\cup]-\infty; -\frac{1}{3}] \quad \text{معناه}$$

$$f \text{ متزايدة تماما على }]-\infty; -\frac{1}{3}] \quad \text{و } [1; +\infty[;$$

$$f' \text{ سالبة تماما على } [-\frac{1}{3}; 1[\quad \text{معناه } f \text{ متناقصة تماما}$$

$$\text{على } [-\frac{1}{3}; 1]$$

نشاط 3:

الهدف: دراسة المماس لمنحني دالة عند نقطة التي فاصلتها نعدم مشتق هذه الدالة.

(1) عين فواصل النقط M تنتمي إلى $]1; 2]$.

(2) عين فواصل النقط M تنتمي إلى $]1; 2]$

(3) المجال $]1; 2]$ تكون فيه f' موجبة تماما .

(4) المجال $]1; 2]$ تكون فيه f' سالبة تماما .

(5) في النقطتين $A(-1; 6)$ و $B(1; 2)$ ، (C_f) يقبل فيهما

مماسين موازيين لحامل محور الفواصل . العدد المشتق

يكون معدوما عند فاصلتي هاتين النقطتين .

نشاط 4:

الهدف: الهدف من هذا النشاط هو حصر دالة بطريقتين وملاحظة أحسن طريقة .

تصحيح : الطريقة الثانية : (2) $[-1, 1]$ عوضا $[-1, 0]$

(3) $[1, 5]$ عوضا $[0, 5]$

الطريقة الأولى :

$$\text{من أجل } x \in [-1, 5] \text{ لدينا } 0 \leq 2x^2 \leq 50$$

$$\text{و } -20 \leq -4x \leq 4$$

$$\text{ومنه } -14 \leq 2x^2 - 4x + 6 \leq 60$$

الطريقة الثانية :

$$T = \frac{2(x_2^2 - x_1^2) - 4(x_2 - x_1)}{x_2 - x_1} = 2(x_1 + x_2 - 2) \quad (1)$$

(2) من أجل كل x_1 و x_2 من $[-1, 1]$ حيث $x_1 \neq x_2$ لدينا:

$$-2 < x_1 + x_2 < 2 \quad \text{ومنه } -8 < T < 0 \quad \text{إذن } T < 0$$

ملاحظة f متناقصة تماما على $[-1, 1]$.

(3) من أجل كل x_1 و x_2 من $[1, 5]$ حيث $x_1 \neq x_2$ لدينا :

$$2 < x_1 + x_2 < 10 \quad \text{ومنه } 0 < T < 16 \quad \text{إذن } T > 0$$

ملاحظة f متزايدة تماما على $[1, 5]$.

x	-1	1	5
$f(x)$	12	4	36

(4) من أجل كل x من $[-1, 5]$ $4 \leq f(x) \leq 36$.

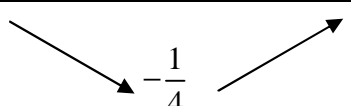
(6) باستعمال جدول التغيرات نجد أحسن حصر لـ $f(x)$.

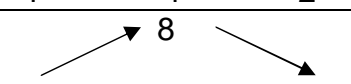
الأعمال موجهة

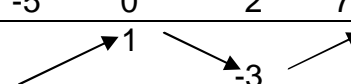
تمارين

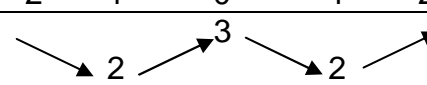
$$\left[f(\sqrt{2})=3\sqrt{2} \right], f'(x)=-3x^2+6 \quad (2)$$


$$\left[f(0)=2 \right], f'(x)=\frac{-2x}{(x^2+1)^2} \quad (3)$$

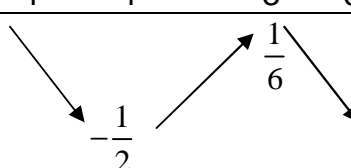
x	-3	$\frac{3}{2}$	2
$f(x)$			


x	-4	-1	2
$f(x)$			


x	-5	0	2	7
$f(x)$				

x	-2	-1	0	1	2
$f(x)$					

x	-1	2
$f(x)$		

x	-4	-1	3	6
$f(x)$				

x	$-\frac{1}{3}$	6
$f(x)$		

x	-7	2
$f(x)$		

$$f'(x)=\frac{x^2-4x-3}{(x-2)^2}, f(x)=\frac{x^2+3}{x-2} \quad (30)$$

الدالة f متزايدة تماماً على كل من المجالين $[-\infty; 2-\sqrt{7}]$ و $[2+\sqrt{7}; +\infty[$ و متناقصة تماماً على كل من $[2; 2+\sqrt{7}[$ و $[2-\sqrt{7}; 2[$

- 1 صحيح 2 صحيح 3 خطأ
4 خطأ 5 صحيح 6 خطأ
7 صحيح 8 خطأ 9 صحيح
10 خطأ 11 خطأ 12 خطأ
13 خطأ 14 صحيح .

$$f(x) \in [f(b); f(a)] \quad (3) \quad (15)$$

(1) منحنى الدالة f يقبل مماساً موازياً لحامل محاور الفواصل
(1) المعادلة تقبل حلاً واحداً .

$$[0; 1] \quad (3) \quad (18)$$

(1) الدالة f متزايدة تماماً

(2) المعادلة $f(x) = m$ تقبل حلاً واحداً على $[0; 1]$.

$$[-\alpha; \alpha] \quad (3) \quad (21)$$

x	-1	1	$+\infty$	$-\infty$	
$f(x)$	-	0	+	0	-

$$[1; +\infty[\text{ و }]-\infty; -1] \quad (23)$$

و متناقصة تماماً على $[-1; 1]$

(24) الدالة f متناقصة تماماً على كل من المجالات

$$[-\infty; -2] \text{ و } [-2; 2] \text{ و } [2; +\infty[.$$

$$[a; b] \text{ و بالتالي الدالة } f' \text{ سالبة على المجال } [a; b] \quad (25)$$

$f(a) > f(b)$ أي $[a; b]$ ، متناقصة تماماً على (الدالة المتناقصة لا تحافظ على الترتيب).

$$[a; b] \text{ و بالتالي الدالة } f' \text{ موجبة على المجال } [a; b] \quad (26)$$

$f(a) < f(b)$ أي $[a; b]$ ، متزايدة تماماً على (الدالة المتزايدة تحافظ على الترتيب).

(27) المنحني (C_1) يرفق بالمنحني (R)

المنحني (C_2) يرفق بالمنحني (Q)

المنحني (C_3) يرفق بالمنحني (P)

$$f'(x) = 3x^2 - 3 \quad (1) \quad (28)$$

أكبر قيمة تبلغها الدالة f على المجال $[-3; 1]$ هي 3 و تبلغها عند -1 $[f(-1)=3]$

(1) 37

x	-3	1	2
$f(x)$		1	

في الحالات المتبقية للتعرف على اتجاه تغير الدالة f ندرس إشارة مشتقتها.

38 $D = [0; 5]$ ؛ $f : x \mapsto |x^2 - 2x|$ (1)

نضع $g(x) = x^2 - 2x$

جدول تغيرات الدالة g هو:

x	0	1	2	5
$g(x)$	0	-1	0	15

ولدينا $f(x) = g(x)$ إذا كان $x \in [2; 5]$

و $f(x) = -g(x)$ إذا كان $x \in [0; 2]$

جدول تغيرات الدالة f هو:

x	0	1	2	5
$f(x)$	0	1	0	15

في الحالات المتبقية للتعرف على اتجاه تغير الدالة f

نتبع نفس بالطريقة مع $f(x) = g(x)$ إذا كان

$g(x) \geq 0$ و $f(x) = -g(x)$ إذا كان $g(x) \leq 0$

39 (1) أدرس اتجاه تغير الدالة f على المجال D ثم

أنجز جدول تغيرات الدالة $|f(x)|$ ؛ $g : x \mapsto$ ، في

كل حالة من الحالات التالية:

$D = [-3; 5]$ ؛ $f : x \mapsto (x^2 - 4)(x + 1)$

من أجل كل x من D : $f'(x) = 3x^2 + 2x - 4$

الدالة f' تنعدم من أجل $x_1 = \frac{-1 - \sqrt{13}}{3}$ و $x_2 = \frac{-1 + \sqrt{13}}{3}$

جدول تغيرات الدالة f هو:

x	-3	x_1	x_2	5
$f(x)$	-10	$f(x_1)$	$f(x_2)$	$f(5)$

الدالة f تنعدم من أجل $x = -2$ أو $x = 2$ أو $x = -1$

و منه جدول تغيرات الدالة $|f|$ هو

x	-3	-2	x_1	-1	x_2	2	5
$ f(x) $		0		0		0	

في الحالات المتبقية للتعرف على اتجاه تغير الدالة g

نتبع نفس بالطريقة مع $g(x) = f(x)$ إذا كان

$f(x) \geq 0$ و $f(x) = -g(x)$ إذا كان $g(x) \leq 0$

نضع $x_1 = 5,012013014015016$

و $x_2 = 5,012013014015017$

$x_1 \in [2 + \sqrt{7}; +\infty[$ و $x_2 \in [2 + \sqrt{7}; +\infty[$

لدينا $x_2 > x_1$ و بالتالي $f(x_2) > f(x_1)$ لأن الدالة f

متزايدة تماماً على $[2 + \sqrt{7}; +\infty[$ ، إذن $B > A$

31 $f'(x) = \frac{-x^2 + 1}{(x^2 - x + 1)^2}$ ، $f(x) = \frac{x}{(x-1)^2 + x}$

الدالة f متناقصة تماماً على $]-\infty; -1]$ و $[1; +\infty[$ و

متزايدة تماماً على $[-1; 1]$.

نضع $x_1 = 2,01401414$

و $x_2 = 2,01401416$

$x_1 \in [1; +\infty[$ و $x_2 \in [1; +\infty[$

لدينا $x_2 > x_1$ و بالتالي $f(x_2) < f(x_1)$ لأن الدالة f

متناقصة تماماً على $[1; +\infty[$ ، إذن $B < A$

32 إذا كان $a < 0$ الدالة f تقبل قيمة حدية

عظمى $\frac{4ac - b^2}{4a}$ عند $\frac{-b}{2a}$ و إذا كان $a > 0$ الدالة f

تقبل قيمة حدية صغرى $\frac{4ac - b^2}{4a}$ عند $\frac{-b}{2a}$.

33 $f'(x) = 3x^2 + a$ ، $f : x \mapsto x^3 + ax + b$

يكون للدالة f قيمتين حديتين مختلفتين إذا كان

$a \in]-\infty; 0[$

34 $f'(x) = 3x^2 + 2ax$ ، $f : x \mapsto x^3 + ax^2 + b$

يكون للدالة f قيمتين حديتين مختلفتين إذا كان $a \neq 0$.

35 $f : x \mapsto ax^2 + bx + c$

إثبات أن $a > 0$: لدينا $f(-1)$ قيمة حدية ، إذن

$B(-1; 3)$ هي ذروة للمنحني (C) و لدينا A تقع فوق

B و بالتالي $f(-1)$ هي قيمة حدية صغرى ، و بما أن

$f(x)$ هي دالة كثير حدود من الدرجة الثانية فإن

$a > 0$

تعيين الدالة f :

نطبق الشروط $f(2) = 1$ و $f(-1) = -3$ و

$f'(-1) = 0$ فنجد $a = \frac{4}{9}$ ، $b = \frac{8}{9}$ و $c = -\frac{23}{9}$

36 نطبق الشروط $f(1) = -1$ و $f(-1) = 0$ و

$f'(-1) = -\frac{13}{2}$ فنجد $a = 3$ ، $b = -\frac{1}{2}$ و $c = -\frac{7}{2}$

(4) $f(1) \leq f(x) \leq f(-1)$ (f متناقصة تماما على D)

(43) $D = [-4; 0]$ ؛ $f : x \mapsto x^2 + 4x + 5$ (1)

من أجل كل x من D : $f'(x) = 2x + 4$

x	-4	-2	0
$f(x)$	5	1	5

لدينا : $1 \leq f(x) \leq 5$

(2) $5 \leq f(x) \leq 8$ ، $(3) \frac{29}{8} \leq f(x) \leq \frac{27}{8}$

(4) $2 \leq f(x) \leq 7$ (5) ، $2 \leq f(x) \leq \frac{7}{2}$

(44) $f : x \mapsto x - \sin x$ (1)

من أجل كل x من \mathbb{R} : $f'(x) = 1 - \cos x$ ؛

من أجل كل x من \mathbb{R} : $f'(x) \geq 0$ ؛

إذن الدالة f متزايدة تماما على \mathbb{R} ؛

جدول تغيرات f :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)$		0	

(2) معادلة (Δ) هي : $y = x$

لدراسة وضعية (C_g) بالنسبة إلى (Δ) ندرس إشارة $x - \sin x$ ونجد :

(Δ) أعلى (C_g) في $[0; +\infty[$ و (Δ) أسفل (C_g) في

$]-\infty; 0]$ و (Δ) يقطع (C_g) في مبدأ المعلم O

(45) $f : x \mapsto \frac{4x^2 - 1}{x^2 + 1}$ (1)

من أجل كل x من \mathbb{R} : $f'(x) = \frac{10x}{(x^2 + 1)^2}$ ؛

الدالة f متزايدة تماما على $[0; +\infty[$ و متناقصة تماما

على $]-\infty; 0]$.

جدول تغيرات f هو :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)$		-1	

(2) $f(x) - 4 = -\frac{5}{x^2 + 1}$

من أجل كل x من \mathbb{R} : $f(x) - 4 < 0$ ؛

من جدول تغيرات f ، لدينا 1- قيمة حدية صغرى لـ f

و نستنتج أن : $-1 \leq f(x) < 4$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$g(x)$		0	

(46)

(40) $I = \left[\frac{3}{2}; 2 \right]$ ؛ $f : x \mapsto 2x^3 - 3x^2 - 1$ (1)

من أجل كل x من I : $f'(x) = 6x(x - 1)$

الدالة f متزايدة تماما على I و بالتالي

$-1 \leq f(x) \leq 3$ أي $f\left(\frac{3}{2}\right) \leq f(x) \leq f(2)$

و بالتالي المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا في

المجال I

(2) $I = [-1; 0]$ ؛ $f : x \mapsto -x^3 + 3x^2 - 3x - 2$

الدالة f متناقصة تماما على I و بالتالي

$-2 \leq f(x) \leq 5$ أي $f(0) \leq f(x) \leq f(-1)$

و بالتالي المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا في

المجال I

في الحالات الأخرى تتبع نفس الطريقة (إذا كانت f متزايدة تماما على I فإنها تحافظ على الترتيب و إذا كانت متناقصة تماما على I فإنها لا تحافظ على الترتيب).

41 تصويب : الدالة f معرفة كما يلي :

$I = [-1; 2]$ و $f : x \mapsto x^3 - 5x^2 + 3x + 2$

من أجل كل x من I : $f'(x) = 3x^2 - 10x + 3$

جدول تغيرات الدالة f هو :

x	-1	$\frac{1}{3}$	2
$f(x)$	-7	$\frac{67}{27}$	-4

المعادلة $f(x) = 1$ تقبل حلين متمايزين على I

لأن : في المجال $\left[-1; \frac{1}{3}\right]$ f متزايدة تماما و

$-7 \leq f(x) \leq \frac{67}{27}$

و في المجال $\left[\frac{1}{3}; 2\right]$ f متناقصة تماما و

$-4 \leq f(x) \leq \frac{67}{27}$

(42) $D = [0; 2]$ ؛ $f : x \mapsto x^2 - 3$ (1)

الدالة f متزايدة تماما على D و

بالتالي $f(0) \leq f(x) \leq f(2)$

أي : $-3 \leq f(x) \leq 1$

(2) $f(2) \leq f(x) \leq f(8)$ (f متزايدة تماما على D)

(3) $f(2) \leq f(x) \leq f(0)$ (f متناقصة تماما على D)

$$\text{هو: } \frac{x_0^2 - 3x_0 + 2 + \frac{1}{4}}{x_0 - \frac{2x_0 - 3}{4}} = 2x_0 - 3$$

لدينا $f'(x_0) = 2x_0 - 3$ ومنه (A_0M_0) هو مماس للمنحني (C_f) في النقطة M_0 .

(3) معامل توجيه (A_0F) هو $\frac{1}{3-2x_0}$ ولدينا:

$$\frac{1}{3-2x_0} \times (2x_0 - 3) = -1 \quad \text{إذن } (A_0F) \perp (A_0M_0)$$

وبالتالي A_0 هي المسقط العمودي لـ F على المماس

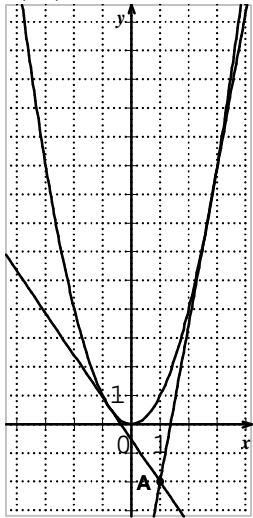
(A_0M_0) ولدينا ترتيب A_0 هو $-\frac{1}{4}$ إذن A_0 تنتمي إلى

$$\text{المستقيم ذي المعادلة } y = -\frac{1}{4}$$

51 $f'(4) = 8$ إذن مماس منحنى الدالة f هو (T_2)

$g'(4) = \frac{-1}{16}$ إذن مماس منحنى الدالة g هو (T_3)

$h'(4) = \frac{1}{2\sqrt{4}} = \frac{1}{4}$ إذن مماس منحنى الدالة h هو (T_1)



52 (1) الرسم .

التخمين: مماسان .

$$(2) (T_a) : y = 2ax - a^2$$

المعادلة $2a - a^2 = -2$ تعني

$$a = 1 + \sqrt{3} \text{ أو } a = 1 - \sqrt{3}$$

معادلة المماس $(T_{1-\sqrt{3}})$ هي :

$$y = 2(1 - \sqrt{3})x - 4 + 2\sqrt{3}$$

معادلة المماس $(T_{1+\sqrt{3}})$ هي :

$$y = 2(1 + \sqrt{3})x - 4 - 2\sqrt{3}$$

53 (1) أ) $P'(x) = 3(x-1)^2$ ومنه من أجل كل عدد

حقيقي x $P'(x) \geq 0$ إذن p متزايدة تماماً على \mathbb{R} ومنه متزايدة على \mathbb{R}

(ب) لدينا $2 < x < 2,2$ بما أن p متزايدة تماماً فإن

$$-1 < P(x) < P(2,2) \quad \text{أي } P(2) < P(x) < P(2,2)$$

$$\text{وبالتالي } P(x) < -0,2$$

(2) أ) $P(x) < -0,2$ معناه $\frac{P(x)}{(x-2)^2} < \frac{-0,2}{(x-2)^2}$ لأنه

من أجل كل عدد x من $]2; 2,2[$ ؛ $(x-2)^2 > 0$ ؛

(ب) $-\frac{0,2}{(x-2)^2} < -5$ تكافئ $0,2 < 5(x-2)^2$ و $x \neq 2$

ومعناه $2 - 0,2 < x < 2 + 0,2$ و $x \neq 2$ ومنه :

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$h(x)$		$\nearrow 1 \searrow$	

نكتب $f(x)$ بدون رمز القيمة المطلقة فنجد:

$$\begin{cases} f(x) = -h(x) & ; x \leq 0 \\ f(x) = h(x) & ; 0 \leq x \leq 1 \\ f(x) = g(x) & ; x \geq 1 \end{cases}$$

إذن الدالة f متناقصة تماماً على $]-\infty; 0]$ و متزايدة تماماً على $[0; +\infty[$.

47 نضع $f(x) = x^3 + 2x^2 - 4$ ،

من أجل كل x من \mathbb{R} : $f'(x) = 3x^2 + 4x$ ؛

x	$-\infty$	$-\frac{4}{3}$	0	1	$+\infty$
$f(x)$		$\nearrow 1 \searrow$		\nearrow	
			-4	-1	

على المجال $[0; 1]$ الدالة f متزايدة تماماً ، بما أن I ينتمي إلى $[-4; -1]$ فإن المعادلة $f(x) = I$ تقبل حلاً

وحيداً $x_0 \in [0; 1]$ حيث $x_0 \in [0; 1]$.

48 (1) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$

(C_f) يقبل مماساً عند كل نقطة لأن الدالة f تقبل الاشتقاق على \mathbb{R} .

(2) • المعادلة $f'(x) = 0$ تقبل حلاً مضاعفاً $x_0 = 1$

• التفسير البياني للنتيجة: المنحني (C_f) يقبل مماساً في النقطة ذات الفاصلة $x_0 = 1$ هو حامل محور الفواصل.

(3) نحل المعادلة $f'(x) = 3$ فنجد $(x=0)$ أو $(x=2)$

و منه نقط المنحني (C_f) التي يكون فيها معامل التوجيه

يساوي 3 هي $A(0; -1)$ و $B(2; 1)$

(4) - إذا كان $c = 0$ يوجد مماس واحد ، إذا كان $c > 0$ يوجد مماسان و إذا كان $c < 0$ لا يوجد مماس.

49 $f(x) = ax + b - \frac{6}{x}$ ، انطلاقاً من الشرطين

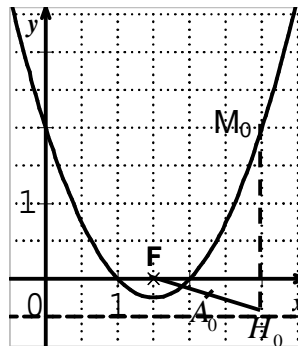
$$f(2) = 0 \text{ و } f'(2) = 1 \text{ نجد } a = -0,5 \text{ و } b = 4$$

(1) الرسم .

$$(2) H_0\left(x_0; -\frac{1}{2}\right)$$

$$A_0\left(\frac{3+2x_0}{4}; -\frac{1}{4}\right)$$

معامل التوجيه (A_0M_0)



إذا كان $x \in]2, 2, 2[\cup]2, 2, 2[$ فإن $x \in]1, 98 ; 2[\cup]2, 2, 2[$

وهذا يعني أن $-\frac{0,2}{(x-2)^2} < -5$ ومنه $f(x) < -5$.

وبالتالي نكتفي بأخذ $a = 0,2$

ت) تصحيح : $f(x) < -M$ عوضا $f(x) < -1$

بنفس الطريقة $-\frac{0,2}{(x-2)^2} < -M$ تكافئ

$$x \in \left] 2 - \sqrt{\frac{0,2}{M}} ; 2 \right[\cup \left] 2 ; 2 + \sqrt{\frac{0,2}{M}} \right[$$

إذا كان $M \geq 5$ فإن $\sqrt{\frac{0,2}{M}} \leq 0,2$ وبالتالي نكتفي بأخذ


$$b = \sqrt{\frac{0,2}{M}} \text{ ولدينا : إذا كان } x \in \left] 2 ; 2 + \sqrt{\frac{0,2}{M}} \right[$$

$$x \in \left] 2 - \sqrt{\frac{0,2}{M}} ; 2 \right[\cup \left] 2 ; 2 + \sqrt{\frac{0,2}{M}} \right[\text{ وهذا يعني}$$

$$f(x) < -M \text{ ومنه } -\frac{0,2}{(x-2)^2} < -M$$

$$x \in]2, 5] \text{ من أجل كل } f'(x) = \frac{x(x-2)(x-3)^2}{(x-2)^4}$$

لدينا : $f'(x) \geq 0$

x	2	3	5	
$f'(x)$		+	0	+
$f(x)$				

6